SIMULACIÓN DE MODELOS DE CRECIMIENTO MEDIANTE MATLAB

Hugo Alejandro Guillén Trujillo, Alejandro Ruiz Sibaja, Daisy Escobar Castillejos, José Alonso Figueroa Gallegos, Universidad Autónoma de Chiapas; Facultad de Ingeniería; Boulevard Belisario Domínguez Km. 1081; Tuxtla Gutiérrez, Chiapas, 29000, México; Tel. 961.61.503.22; Fax. 961.61.505.27; guillenhugo@hotmail.com, asibaja@unach.mx

1. INTRODUCCIÓN

La biosfera está constituida de sistemas que cambian con el paso del tiempo. Ambos sistemas: ambiental y humano, pueden describirse por la forma de sus cambios. El modo por el cual el sistema cambia depende de la organización del sistema y del tipo de fuente de energía que está disponible. Por ejemplo, algunos ecosistemas aumentan en tamaño y complejidad mientras que otros detienen su crecimiento. De igual manera, algunas pequeñas ciudades pueden crecer y convertirse en ciudades grandes mientras que otras ciudades parecen permanecer del mismo tamaño durante décadas (se considera entonces, que ellas parecen haber alcanzado un estado de estabilidad). Otras ciudades, por su parte, disminuyen de tamaño y complejidad, las industrias cierran, y los habitantes se trasladan a otro lugar. La organización de un sistema puede estudiarse diseñando un diagrama del sistema o modelo de este (ver figura 1). A través de los tipos de fuentes de energía en un diagrama, se puede definir como el sistema crece o disminuye.

Figura 1. Equilibrio entre las tasas de incremento (natalidad e inmigración) y las de decremento (mortalidad y emigración).

2. MODELOS DE CRECIMIENTO

Existen diferentes modelos matemáticos para simular el crecimiento poblacional y/o ambiental. Entre ellos los más conocidos en la práctica profesional son:

1. Modelo de crecimiento de Tanque
2. Modelo de crecimiento Exponencial
3. Modelo de crecimiento Logístico
4. Modelo de crecimiento renovable

En las ecuaciones 1 a 5 se muestran las ecuaciones diferenciales que gobiernan el comportamiento de estos modelos.

Modelo de crecimiento del Tanque

$$\frac{DQ}{DT} = J - k_0\ Q \tag{1}$$

Modelo de crecimiento Exponencial

$$\frac{DQ}{DT} = k_0\ E\ Q - k_1\ Q \tag{2}$$

Modelo de crecimiento Logístico

$$\frac{DQ}{DT} = k_1\ E\ Q - k_4\ Q^2 \tag{3}$$

Modelo de crecimiento Renovable

$$\frac{DQ}{DT} = k_3\ J_r\ Q - k_4\ Q \tag{4}$$

$$J_r = \frac{J_0}{1 + k_0\ Q} \tag{5}$$

3. EL PROGRAMA MATLAB

Uno de los objetivos planteados para este trabajo es el desarrollo de una herramienta computacional que permita la simulación de modelos de crecimiento mediante un lenguaje de programación.

Para realizar la simulación se eligió MATLAB dada la necesidad de plantear la solución mediante un sistema que sea interactivo y que al mismo tiempo tenga la capacidad de un lenguaje de programación para cálculo científico y técnico en general.

MATLAB es el nombre abreviado de "MATrix LABoratory". MATLAB es un programa para realizar cálculos numéricos con vectores y matrices. Como caso particular puede también trabajar con números escalares -tanto reales como complejos-, con cadenas de caracteres y con otras estructuras de información más complejas. Una de las capacidades más atractivas es la de realizar una amplia variedad de gráficos en dos y tres dimensiones. MATLAB tiene también un lenguaje de programación propio. Está disponible para las plataformas Unix, Windows y Apple Mac OS X.

El lenguaje de programación de MATLAB es una magnífica herramienta de alto nivel para desarrollar aplicaciones técnicas, fácil de utilizar y que aumenta significativamente la productividad de los programadores respecto a otros entornos de desarrollo. Por esta razón es un programa muy usado en universidades y centros de investigación y desarrollo.

Dado que los comandos de MATLAB son similares a la expresión de los pasos de ingeniería en matemáticas, escribir soluciones en computadora con MATLAB es mucho más fácil que usar un lenguaje de alto nivel como C o Fortran.

4. SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LOS MODELOS DE CRECIMIENTO

El planteamiento de la simulación numérica de la ecuación diferencial de primer orden con que se aproximan los modelos de crecimiento se basa en la solución propuesta por Euler. Este método se basa en aproximar la derivada mediante la fórmula de diferencias finitas adelantada.

$$u'(t_k) = \frac{u(t_{k+1}) - u(t_k)}{h} - \frac{h}{2} u''(z) = f(t_k, u(t_k)) \tag{5}$$

Al despejar se obtiene:

$$u(t_{k+1}) = u(t_k) + h\ f(t_k, u(t_k)) + \frac{h^2}{2} f''(z_k) \tag{6}$$

El método de Euler procede despreciando el término de orden h^2 de la ecuación anterior por ser desconocido y generando una secuencia de aproximaciones $U_k \approx u(t_k)$ que cumplen:

$$U_{k+1} = U_k + h\ f(t_k, U_k) \tag{7}$$

El método procede en forma recursiva, así con t_0 y $U_0 = u(t_0)$ se puede calcular U_1, con este valor se calcula U_2 y así sucesivamente. Cuanto menor es h la solución obtenida es más precisa y los valores U_k están más próximos a los exactos $u(t_k)$. Una aproximación suficientemente buena se basa en una $h \leq 10$. La aplicación del método de Euler para realizar la simulación numérica del modelo de crecimiento del Tanque conduce al siguiente algoritmo (ver cuadro 1):

Cuadro 1. Algoritmo de cálculo para el modelo de crecimiento del Tanque

Datos iniciales para el tiempo t_i:

$Q_i, J, k_0, t_o, t_f, dt$

A partir de esto datos:

1. Calcular $dQ_{i+1} = J - k_0\ Q_i$
2. Actualizar $Q_{i+1} = Q_i + dQ_{i+1}\ dt$
3. Actualizar $t_{i+1} = t_i + dt$
4. Revisar ¿ $t_{i+1} = t_f$?
5. Si la igualdad se cumple finalizar el proceso
6. En caso contrario volver al paso 1

De manera semejante se procede para los algoritmos de cálculo de los modelos mencionados en la parte inicial de este trabajo. En los cuadros 2, 3 y 4 se muestran estos algoritmos.

Cuadro 2. Algoritmo de cálculo para el modelo de crecimiento Exponencial

Datos iniciales para el tiempo t_i : $Q_i, E, k_0, k_1, t_o, t_f, dt$ A partir de esto datos: 1. Calcular $dQ_{i+1} = \left(k_0\ E - k_1\right) Q_i$ 2. Actualizar $Q_{i+1} = Q_i + dQ_{i+1}\ dt$ 3. Actualizar $t_{i+1} = t_i + dt$ 4. Revisar ¿ $t_{i+1} = t_f$? 5. Si la igualdad se cumple finalizar el proceso 6. En caso contrario volver al paso 1

Cuadro 3. Algoritmo de cálculo para el modelo de crecimiento Logístico

Datos iniciales para el tiempo t_i : $Q_i, E, k_1, k_4, t_o, t_f, dt$ A partir de esto datos: 1. Calcular $dQ_{i+1} = \left(k_1\ E - k_4\ Q_i\right) Q_i$ 2. Actualizar $Q_{i+1} = Q_i + dQ_{i+1}\ dt$ 3. Actualizar $t_{i+1} = t_i + dt$ 4. Revisar ¿ $t_{i+1} = t_f$? 5. Si la igualdad se cumple finalizar el proceso 6. En caso contrario volver al paso 1

5. APLICACIONES

Con base en los algoritmos presentados en el apartado anterior se escribieron cuatro programas en MATLAB versión 6.5. Los programas se generaron de manera tal que el usuario introduce los datos de entrada directamente desde la pantalla y al término del cálculo se despliega una gráfica donde se concentran los resultados del proceso.

A continuación, en los cuadros 5, 6, 7 y 8, se muestran los programas correspondientes a cada modelo de crecimiento. En las figuras 2, 3, 4 y 5 aparecen los resultados de la ejecución de estos programas. Los datos que se usaron para generar la figura 2 son: $Q = 1.0$, $J = 4.0$, $k_0 = 0.50$, $t_0 =$

0.0, $t_f = 50$ y $dt = 1$. Para la gráfica de la figura 3 se utilizaron: $Q = 10.0$, $E = 1.0$, $k_0 = 0.07$, $k_1 = 0.05$, $t_0 = 0.0$, $t_f = 300.0$ y $dt = 1$. La gráfica de la figura 4 se generó con: $Q = 4.0$, $E = 1.70$, $k_1 = 0.04$, $k_4 = 0.008$, $t_0 = 0.0$, $t_f = 60.0$ y $dt = 1$. En la gráfica de la figura 5 se usaron: $Q = 0.10$, $J = 45.0$, $k_0 = 0.10$, $k_3 = 0.008$, $k_4 = 0.03$, $t_0 = 0.0$, $t_f = 60.0$ y $dt = 1$.

Cuadro 4. Algoritmo de cálculo para el modelo de crecimiento Renovable

Datos iniciales para el tiempo t_i:

$Q_i, J_0, k_0, k_3, k_4, t_o, t_f, dt$

A partir de esto datos:

1. Obtener $J_r = \dfrac{J_0}{1 + k_0\ Q_i}$
2. Calcular $dQ_{i+1} = (k_3\ J_r - k_4)\, Q_i$
3. Actualizar $Q_{i+1} = Q_i + dQ_{i+1}\ dt$
4. Actualizar $t_{i+1} = t_i + dt$
5. Revisar ¿$t_{i+1} = t_f$?
6. Si la igualdad se cumple finalizar el proceso
7. En caso contrario volver al paso 2

Cuadro 5. Programa de cálculo para el modelo de crecimiento del Tanque

```
clear
clc
% Este programa calcula el crecimiento de la población
% mediante el modelo de Tanque
% Dr. Alejandro Ruiz Sibaja
% Dr. Hugo Guillén Trujillo
% Facultad de Ingeniería
% Universidad Autónoma de Chiapas
% Junio de 2011

fprintf('\n \n')
fprintf('Calculo del crecimiento de la población \n')
fprintf('Modelo de Tanque \n \n')

Q(1) = input('introduzca el valor inicial de Q ');
t(1) = input ('introduzca el valor inicial del tiempo ');
k(1) = input ('introduzca el valor de k ');
J(1) = input ('introduzca el valor de J ');
dt = input('introduzca el valor de dt ');
tf = input ('introduzca el valor final del tiempo ');
```

```
for j = 1:(tf-1)
    i = j + 1;
    dQ(i) = J(1) - k(1).* Q(j);
    Q(i) = Q(j) + dQ(i);
    t(i) = t(j) + dt;
end

plot (t,Q), title ('Modelo de tanque'), xlabel('Tiempo'), ylabel('Depósito')
```

Cuadro 6. Programa de cálculo para el modelo de crecimiento Exponencial

```
clear
clc
% Este programa calcula el crecimiento de la población
% mediante el modelo Exponencial
% Dr. Alejandro Ruiz Sibaja
% Dr. Hugo Guillén Trujillo
% Facultad de Ingeniería
% Universidad Autónoma de Chiapas
% Junio de 2011

fprintf('\n \n')
fprintf('Calculo del crecimiento de la población \n')
fprintf('Modelo exponencial \n \n')

Q(1) = input('introduzca el valor inicial de Q ');
t(1) = input ('introduzca el valor inicial del tiempo ');
k0(1) = input ('introduzca el valor de k0 ');
E(1) = input('introduzca el valor de E ');
k1(1) = input('introduzca el valor de k1 ');
dt = input('introduzca el valor de dt ');
tf = input ('introduzca el valor final del tiempo ');

diferencia = k0(1).*E(1) - k1(1);

for j = 1:(tf-1)
    i = j + 1;
    dQ(i) = diferencia * Q(j);
    Q(i) = Q(j) + dQ(i);
    t(i) = t(j) + dt;
end

plot (t,Q), title ('Modelo exponencial'), xlabel('Tiempo'), ylabel('Depósito')
```

Cuadro 7. Programa de cálculo para el modelo de crecimiento Logístico

```
clear
clc
% Este programa calcula el crecimiento de la población
% mediante el modelo Logístico
% Dr. Alejandro Ruiz Sibaja
% Dr. Hugo Guillén Trujillo
% Facultad de Ingeniería
% Universidad Autónoma de Chiapas
% Junio de 2011

fprintf('\n \n')
fprintf('Calculo del crecimiento de la población \n')
fprintf('Modelo logístico \n \n')

Q(1) = input('introduzca el valor inicial de Q ');
t(1) = input ('introduzca el valor inicial del tiempo ');
k1(1) = input ('introduzca el valor de k1 ');
E(1) = input('introduzca el valor de E ');
k4(1) = input('introduzca el valor de k4 ');
dt = input('introduzca el valor de dt ');
tf = input ('introduzca el valor final del tiempo ');

for j = 1:(tf-1)
    i = j + 1;
    diferencia = k1(1).*E(1) - k4(1).*Q(j);
    dQ(i) = diferencia * Q(j);
    Q(i) = Q(j) + dQ(i);
    t(i) = t(j) + dt;
end

plot (t,Q), title ('Modelo logístico'), xlabel('Tiempo'), ylabel('Depósito')
```

Cuadro 8. Programa de cálculo para el modelo de crecimiento Renovable

```
clear
clc
% Este programa calcula el crecimiento de la población
% mediante el modelo Renovable
% Dr. Alejandro Ruiz Sibaja
% Dr. Hugo Guillén Trujillo
% Facultad de Ingeniería
% Universidad Autónoma de Chiapas
% Junio de 2011

fprintf('\n \n')
fprintf('Calculo del crecimiento de la población \n')
fprintf('Modelo renovable \n \n')
```

```
Q(1) = input('introduzca el valor inicial de Q ');
t(1) = input ('introduzca el valor inicial del tiempo ');
k0(1) = input ('introduzca el valor de k0 ');
k3(1) = input('introduzca el valor de k3 ');
k4(1) = input('introduzca el valor de k4 ');
J0(1) = input('introduzca el valor de J ');
dt = input('introduzca el valor de dt ');
tf = input ('introduzca el valor final del tiempo ');

for j = 1:(tf-1)
    i = j + 1;
    R(j) = J0(1) /(1 + k0(1).*Q(j));
    dQ(i) = k3(1).*R(j).*Q(j) - k4(1).*Q(j);
    Q(i) = Q(j) + dQ(i);
    t(i) = t(j) + dt;
end

plot (t,Q), title ('Modelo renovable'), xlabel('Tiempo'), ylabel('Depósito')
```

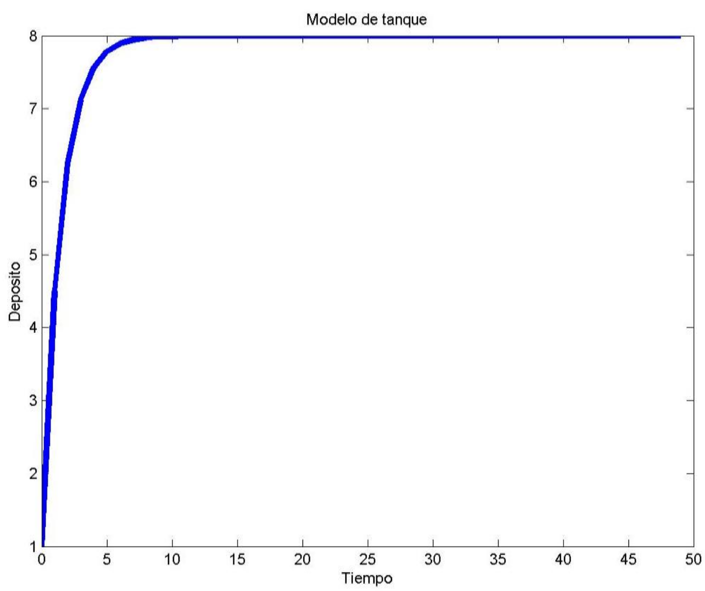

Figura 2. Simulación de modelo de crecimiento del Tanque

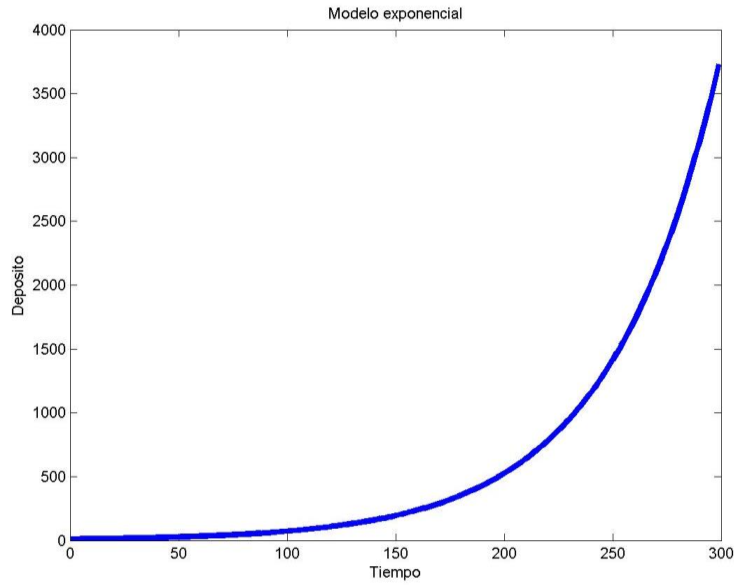

Figura 3. Simulación de modelo de crecimiento Exponencial

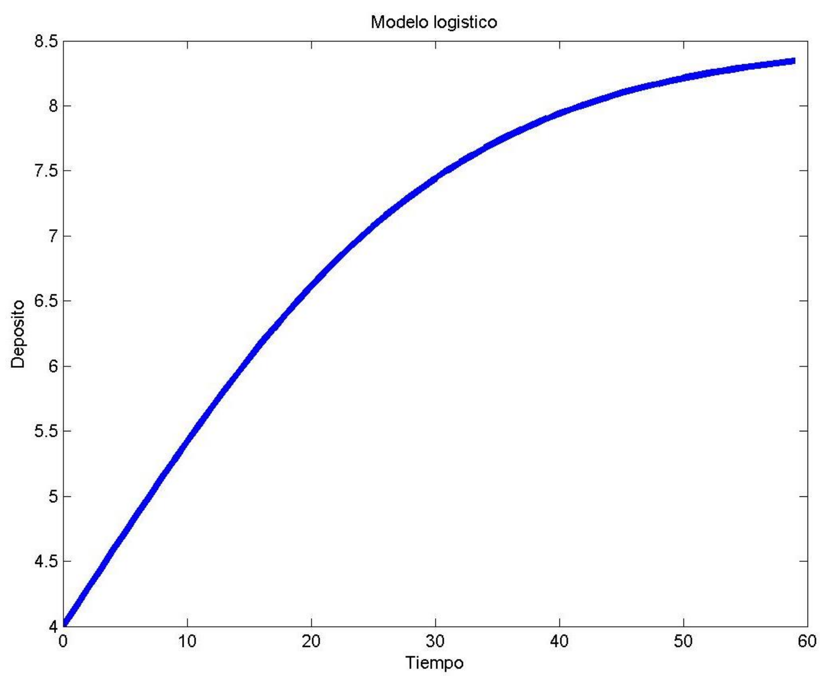

Figura 4. Simulación de modelo de crecimiento Logístico

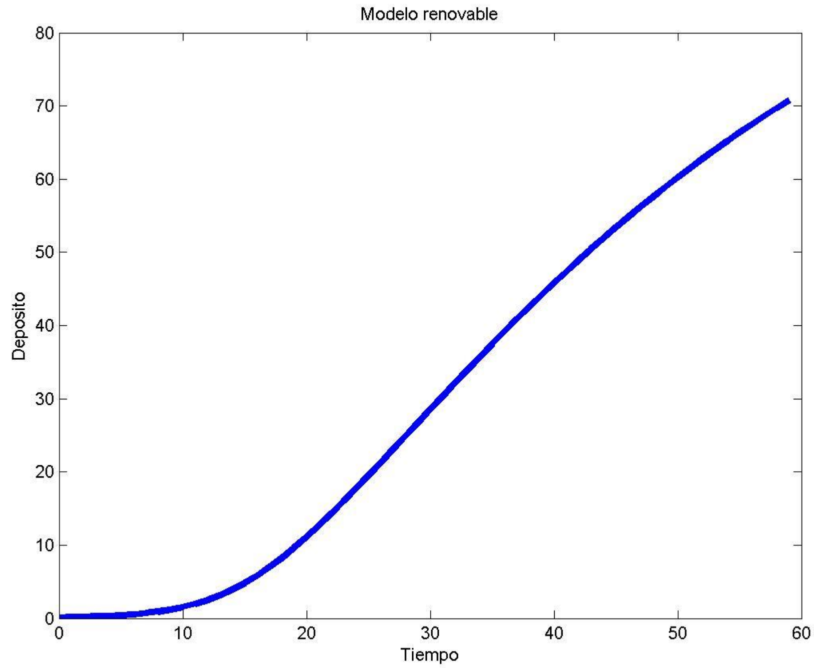

Figura 5. Simulación de modelo de crecimiento Renovable

6. CONCLUSIONES

Se ha presentado la simulación numérica de cuatro modelos de crecimiento: de tanque, exponencial, logístico y renovable. La simulación se realizó mediante MATLAB debido a la sencillez de su manejo y a su gran capacidad tanto para el análisis numérico como para representar resultados en gráficas de 2 y 3 dimensiones. La simulación numérica de los modelos aquí presentados se ha mostrado apropiada y eficiente dado que permite considerar el efecto de diferentes factores que modifican el crecimiento y en consecuencia considerar diferentes escenarios para este. Así, estas simulaciones sirven para hacer proyecciones a mediano y largo plazo de población tanto humana, como animal o vegetal; de desarrollo económico o de cualquier fenómeno que refleje crecimiento. Conviene recordar que la práctica de la modelización consiste en formular esquemas simples para describir realidades complejas, con la esperanza de que estos esquemas simples correspondan a mecanismos o leyes generales que hacen inteligibles los patrones observados en la naturaleza. Desarrollos futuros de este trabajo pueden ir encaminados a utilizar otros modelos con tasas de crecimiento no lineales diferentes, también sería interesante generalizar el modelo al caso de especies en competencia, por ejemplo presa-depredador, o simplemente competidores por el alimento.

7. REFERENCIAS

1. Howard T. Odum (1988), Environmental Systems and Public Policy, Ecological Economics Program. University of Florida, Gainesville 32611, USA.
3. Etter, Delores M. (1997), Solución de problemas de Ingeniería con MATLAB, Prentice-Hall, ISBN 970-17-0111-9.

4. García De Jalón, Javier (2004), Aprenda MATLAB 6.5 como si estuviera en primero, Escuela Técnica de Ingenieros Industriales, Universidad Politécnica de Madrid.
5. Nieves Hurtado, Antonio, Domínguez Sánchez, Federico C. (2004), Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería, CECSA, ISBN 9702402581.